УДК 514.112.4

РАВЕНСТВО МЕНЕЛАЯ, ПУЧОК ПРЯМЫХ И МНОГОУГОЛЬНИК

Гаврилов В.К., кандидат физико-математических наук,
Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, г. Красноярск
gavrilov1009@mail.ru

Аннотация. Предложено рассмотрение равенства Менелая в качестве равенства для пересечений сторон угла и двух прямых пучка. Получено равенство единице для пересечений сторон угла и трёх прямых пучка. Предложен новый алгоритм доказательства аналога теоремы Понселе для многоугольника с нечётным и чётным числом сторон. Получено равенство единице для многоугольника вида «звезда».

Ключевые слова: теоремы Менелая, Чевы, многоугольник, пучок прямых, контур.

MENELAUS' EQUALITY, BUNCH OF DIRECT LINES AND POLYGON

V.K. Gavrilov,
State Pedagogic University of name V.P. Astaviav, Krasnoiarsk,
gavrilov1009@mail.ru

Abstract. It is offered consideration Menelau's equality as an equality for intersection the sides of the angle and two cross-line the bunch of direct lines. It is received equality to unit for intersection the sides of the angle and three cross-line the bunch of direct lines. It is considered variant of proof Ponsele's theorem for polygon with uneven and even numbers of the sides. It is offered equality to unit for polygon of the form "star".

Key words: Menelaus', Ceva's theorems, polygon, bunch of direct line, contour.

Известно расширение действия равенства Чевы на многоугольник с нечётным числом сторон по теореме Понселе: «Прямые, соединяющие какую-нибудь точку с вершинами многоугольника, имеющего нечетное число сторон, образуют на противоположных его сторонах такие отрезки, что произведение отрезков, не имеющих общих концов, равно произведению остальных отрезков», [1, с. 35]. Делением одной части равенства на другую теорема Понселе легко приводится к виду равенства единице.

Будем искать расширение действия равенства Чевы на многоугольник с чётным числом сторон на основе связи равенства Чевы с равенством Менелая.

В [2, с. 8] предложен вариант расширенной трактовки теоремы Менелая:

Теорема 1. *Если прямые A_0B_0, A_0C_0, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются, то отрезки между точками пересечения прямых образуют ряд контуров, на каждом из которых, при направленном обходе контура, произведение отношений длин отрезков равно единице.*

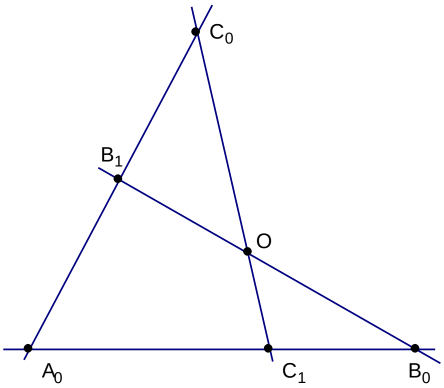
В теореме Менелая пересечения четырёх прямых традиционно рассматривают в качестве треугольника и прямой [1, с. 37], секущей треугольник (рис. 1). Теорема 1 не ограничивает действие теоремы Менелая треугольником и секущей, в частности, рассмотрим пересечения четырёх прямых в теореме Менелая в качестве пересечений двух прямых, образующих угол, и прямых пучка.

Теорема 1, следствие 1. *Пересечения прямых, образующих угол, и прямых пучка.*

В пучке две прямых.

Доказательство. Следствие 1 эквивалентно теореме Менелая (рис. 1), равенство (1); доказательство известно [1, с. 37], [2, с. 9, ф.1].

$$\frac{A_0B_0}{B_0C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0B_1}{B_1A_0}=1. \tag{1}$$



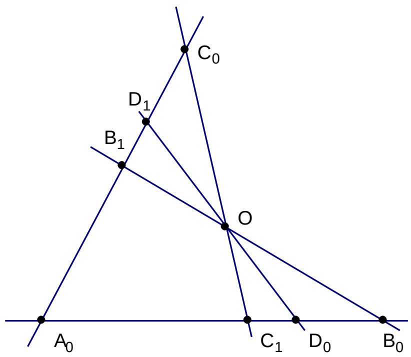
$$\left(\frac{A_0B_0}{B_0C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0B_1}{B_1A_0}\right)=1,00$$

Рис. 1

Ремарка. На рисунках приведены доказанные равенства в виде равенств единице. Появление нулей после единицы не связано с доказательством и обусловлено численной проверкой равенств на компьютере (программа The Geometer’s Sketchpad V4 KCP Technologies ,– «Живая геометрия»).

В пучке три прямых.

Доказательство. На рисунке 1 через центр O пучка проведём прямую D_0D_1 и рассмотрим пересечения двух прямых A_0B_0, A_0C_0, образующих угол A_0, и трёх прямых пучка, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1, с центром в точке O (рис. 2). Будем искать равенство единице на контуре, образованном отрезками прямых между точками пересечений: $C_1, O, C_0, D_1, B_1, O, B_0, D_0, C_1$.



$$\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\right)\cdot\left(\frac{B_1O}{OB_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0D_0}{D_0C_1}\right)=1,00$$

Рис. 2

Согласно (1) для прямой D_0D_1, секущей треугольники $A_0B_0B_1$ и $A_0C_1C_0$, соответственно имеем равенства:

$$\frac{A_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0A_0}=1;$$

$$\frac{A_0D_0}{D_0C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1A_0}=1.$$

Перемножив равенства, получим:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1. \qquad (2)$$

Равенство единице найдено, – равенство (2), – следствие 1 теоремы 1 доказано.

С помощью (2) докажем теорему 2, расширяющую действие равенства Чевы на многоугольник с нечётным и чётным числом сторон.

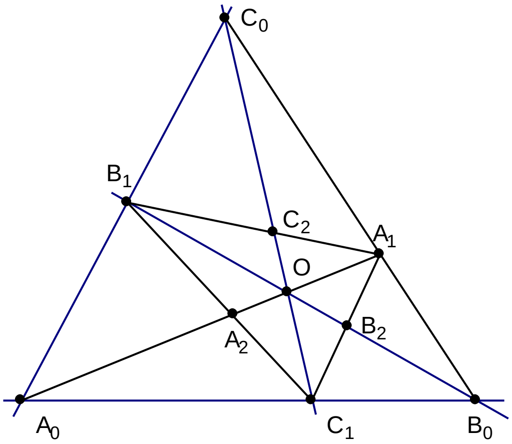
Теорема 2. *Прямые пучка с центром в многоугольнике, поочерёдно проходящие через вершины и пересекающие стороны углов многоугольника, отсекают на прямых, проходящих через вершины углов многоугольника, отрезки, образующие контур, при направленном обходе которого, произведение отношений длин отрезков на сторонах контура равно единице.*

Следствие 1. *В случае нечётного числа прямых в пучке контур образован отрезками на сторонах многоугольника.*

Следствие 2. *В случае чётного числа прямых в пучке контур образован отрезками на сторонах многоугольника и отрезками на прямой пучка, принятой за отсчётную.*

Докажем следствие 1 теоремы 2 на примере треугольника.

Доказательство следствия 1. На рисунке 1 проведём прямые A_0O, B_0C_0, точку пересечения прямых обозначим через A_1. Проведём отрезки A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1, точки пересечения отрезков с прямыми A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 обозначим соответственно через A_2, B_2, C_2 (рис. 3). В каждом из треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ прямые пучка с центром в точке O поочерёдно проходят через вершины и пересекают стороны углов треугольника.



$$\left(\frac{A_0B_1}{B_1C_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0C_1}{C_1A_0}\right)=1{,}00$$

$$\left(\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\right)\cdot\left(\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\right)=1{,}00$$

Рис. 3

Согласно (2) для каждой пары противолежащих сторон треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ имеем равенства:

$$\frac{A_0O}{OA_1}\cdot\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}=1;$$

$$\frac{B_0O}{OB_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}=1;$$

$$\frac{C_0O}{OC_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\cdot\frac{A_1O}{OA_0}\cdot\frac{A_0B_1}{B_1C_0}=1.$$

Перемножив равенства, получим:

$$\left(\frac{A_0B_1}{B_1C_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}\right)\cdot\left(\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\right)=1. \tag{3}$$

Поскольку форма треугольника $A_0B_0C_0$ постоянна, а форма треугольника $A_1B_1C_1$ зависит от выбора положения точки O, то треугольники независимы и полученное равенство (3) эквивалентно равенствам:

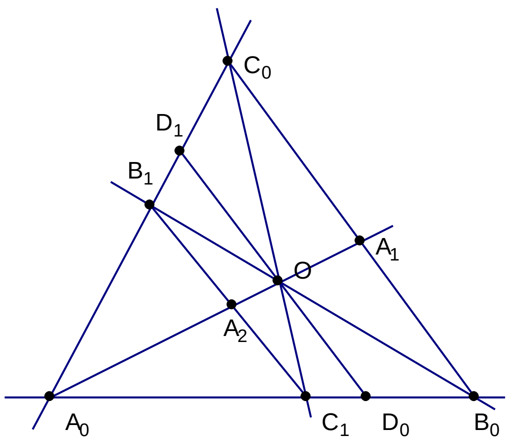
$$\frac{A_0B_1}{B_1C_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}=1; \tag{3.1}$$

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}=1. \tag{3.2}$$

Равенство единице для треугольника получено, – равенство (3.1), – следствие 1 теоремы 2 доказано. Полученное для каждого треугольника равенство является равенством Чевы. Аналогично доказывается и теорема Понселе для случая многоугольника с нечётным числом сторон большим трёх.

Докажем следствие 2 теоремы 2 на примере четырёхугольника.

Доказательство следствия 2. На рисунке 1 проведём прямые A_0O, B_0C_0, D_0D_1 и отрезок B_1C_1; точки пересечения отрезков с прямой A_0O обозначим A_1, A_2 (рис. 4). Рассмотрим четырёхугольник $C_1B_0C_0B_1$ и четыре прямых пучка с центром O, – A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1, из которых поочерёдно две – B_0B_1, C_0C_1, каждая проходит через две вершины углов четырёхугольника, а две, – A_0A_1, D_0D_1, каждая пересекает две стороны четырёхугольника.



$$\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\right)\cdot\left(\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0D_0}{D_0C_1}\right)=1{,}00$$

Рис. 4

Согласно (2) для каждой пары противолежащих сторон четырёхугольника имеем равенства:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1;$$
$$\frac{B_0O}{OB_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}=1.$$

Перемножив равенства, получим:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1. \qquad (4)$$

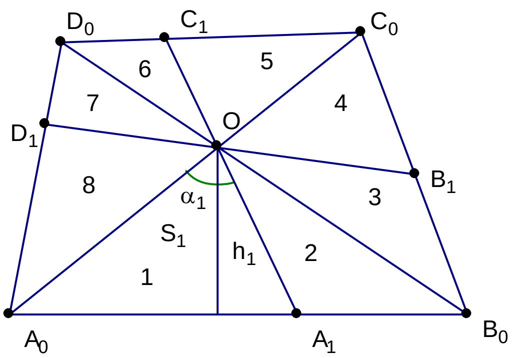
Равенство единице для четырёхугольника получено, – равенство (4), – следствие 2 и теорема 2 доказаны. Аналогично доказывается теорема 2 для случая многоугольника с чётным числом сторон большим четырёх.

В многоугольнике с чётным числом сторон половина прямых пучка не проходит через вершины многоугольника и, следовательно, прямыми Чевы [1, с. 11] не является. Вероятно, это и объясняет отсутствие аналога теоремы Чевы для многоугольника с чётным числом сторон.

Получим для многоугольника с чётным числом сторон (четырёхугольника) доказанное равенство (4) известным способом отношения площадей треугольников, построенных на сторонах многоугольника [1, с. 35].

Будем искать при направленном обходе контура четырёхугольника результат последовательного деления и умножения отношений длин отрезков, противолежащих вертикальным углам в центре пучка. Такой алгоритм поиска обеспечивает для многоугольника с нечётным числом сторон выполнение утверждения теоремы Понселе (см. выше) о равенстве единице отношения произведений длин отрезков, не имеющих общих концов.

Действительно, отрезки на сторонах многоугольника, противолежащие вертикальным углам в центре пучка, общих концов не имеют, а чтобы в произведении отношений длин отрезков не оказались смежные отрезки, при направленном обходе контура многоугольника необходимо чередовать деление и умножение отношений длин отрезков, не имеющих общих концов.



$$\left(\frac{A_0A_1}{A_1B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0B_1}{B_1C_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0O}{OA_0}\right)\cdot\left(\frac{A_0D_1}{D_1D_0}\right)\cdot\left(\frac{D_0C_1}{C_1C_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0O}{OA_0}\right)=1{,}00$$

Рис. 5

Аналогично [1, с. 35] (рис. 5) имеем равенства:

$$2\cdot S_1=h_1\cdot A_0A_1=A_0O\cdot A_1O\cdot\sin(\alpha_1);\quad 2\cdot S_2=h_2\cdot A_1B_0=A_1O\cdot B_0O\cdot\sin(\alpha_2);$$
$$2\cdot S_3=h_3\cdot B_0B_1=B_0O\cdot B_1O\cdot\sin(\alpha_3);\quad 2\cdot S_4=h_4\cdot B_1C_0=B_1O\cdot C_0O\cdot\sin(\alpha_4);$$
$$2\cdot S_5=h_5\cdot C_0C_1=C_0O\cdot C_1O\cdot\sin(\alpha_5);\quad 2\cdot S_6=h_6\cdot C_1D_0=C_1O\cdot D_0O\cdot\sin(\alpha_6);$$

$$2 \cdot S_7 = h_7 \cdot D_0D_1 = D_0O \cdot D_1O \cdot \sin(\alpha_7); \quad 2 \cdot S_8 = h_8 \cdot D_1A_0 = D_1O \cdot A_0O \cdot \sin(\alpha_8).$$

$$h_1 = h_2;\, h_3 = h_4;\, h_5 = h_6;\, h_7 = h_8; \qquad \alpha_1 = \alpha_5;\, \alpha_2 = \alpha_6;\, \alpha_3 = \alpha_7;\, \alpha_4 = \alpha_8.$$

Далее, согласно алгоритму поиска получим:

$$\frac{A_0A_1}{C_0C_1} \cdot \frac{C_1D_0}{A_1B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{D_0D_1} \cdot \frac{D_1A_0}{B_1C_0} = \left(\frac{S_1}{S_5} \cdot \frac{S_6}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_7} \cdot \frac{S_8}{S_4}\right) \cdot \left(\frac{h_5}{h_1} \cdot \frac{h_2}{h_6} \cdot \frac{h_7}{h_3} \cdot \frac{h_4}{h_8}\right) =$$

$$= \frac{A_0O \cdot A_1O}{C_0O \cdot C_1O} \cdot \frac{C_1O \cdot D_0O}{A_1O \cdot B_0O} \cdot \frac{B_0O \cdot B_1O}{D_0O \cdot D_1O} \cdot \frac{D_1O \cdot A_0O}{B_1O \cdot C_0O} = \left(\frac{A_0O}{C_0O}\right)^2.$$

Или:

$$\frac{A_0A_1}{C_0C_1} \cdot \frac{C_1D_0}{A_1B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{D_0D_1} \cdot \frac{D_1A_0}{B_1C_0} = \left(\frac{A_0O}{C_0O}\right)^2. \tag{5}$$

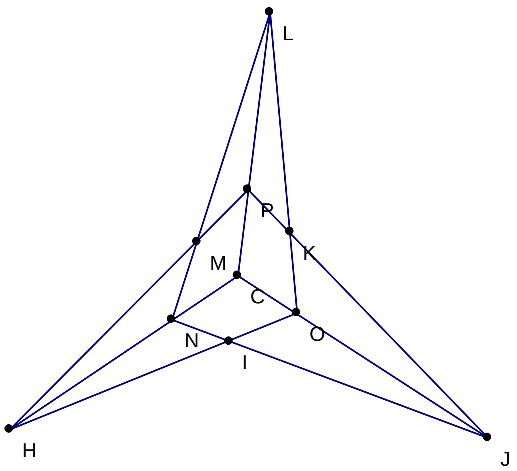
После приведения равенства (5) к единице получим равенство (6), эквивалентное равенству (4):

$$\frac{A_0A_1}{A_1B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{B_1C_0} \cdot \frac{C_0O}{OA_0} \cdot \frac{A_0D_1}{D_1D_0} \cdot \frac{D_0C_1}{C_1C_0} \cdot \frac{C_0O}{OA_0} = 1. \tag{6}$$

Четырёхугольник Менелая (рис. 1) можно рассматривать и в качестве невыпуклого четырёхугольника вида «звезда» с двумя лучами. Размещая такие четырёхугольники один возле другого, можно получить ряд невыпуклых многоугольников вида «звезда» с числом лучей больше двух. В частности, применяя равенство (7) [2, с. 9, ф. (5)] к контурам смежных четырёхугольников, получим равенство (8) на контуре из отрезков, формирующих три луча многоугольника вида «звезда» (рис. 6).

$$\frac{A_0C_1}{C_1B_0} \cdot \frac{B_0B_1}{B_1O} \cdot \frac{OC_1}{C_1C_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1. \tag{7}$$

$$\frac{HO}{OI} \cdot \frac{IN}{NJ} \cdot \frac{JP}{PK} \cdot \frac{KO}{OL} \cdot \frac{LN}{NM} \cdot \frac{MP}{PH} = 1. \tag{8}$$



$$\left(\frac{HO}{OI}\right)\cdot\left(\frac{IN}{NJ}\right)\cdot\left(\frac{JP}{PK}\right)\cdot\left(\frac{KO}{OL}\right)\cdot\left(\frac{LN}{NM}\right)\cdot\left(\frac{MP}{PH}\right) = 1{,}00$$

Рис. 6

Таким образом, расширенный вариант теоремы Менелая даёт возможность получить аналоги равенства Чевы для многоугольников с нечётным и чётным числом сторон и для многоугольников вида «звезда».

Литература

1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство мин. просвещения РСФСР, 1962.

2. Гаврилов В.К. Равенства Менелая, Чевы и другие равенства // «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. – Красноярск, 2016. – С. 8-12. http://elibrary.ru/item.asp?id=27468320.